Activité B suite au devoir surveillé $n°3$

Objectifs :

- ★ Montrer qu'une fonction est bijective en utilisant le théorème de la bijection.
- ★ Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une bijection réciproque.
- ★ Déterminer par équivalence la bijection réciproque d'une fonction.

I. Reprendre la partie B en autonomie sur votre copie à l'aide de la correction.

B : Bijection réciproque

3. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.
   On note argch la bijection réciproque associée.
4. Déterminer le domaine de dérivabilité de argch puis calculer argch'.
5. Calculer argch(2).
6. Exprimer argch à l'aide de la fonction ln.
7. Retrouver l'expression de argch' en dérivant celle obtenue pour argch.

II. Résoudre l'exercice suivant par groupe de deux ou trois.

Notons $f : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer f' afin de dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.
   On note g la bijection réciproque associée.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de g puis exprimer g' en fonction de g.
4. Exprimer g à l'aide des fonctions usuelles.
5. Retrouver l'expression de g' en dérivant celle obtenue pour g.

III. Si besoin, continuer à s'entraîner à la maison avec le savoir-faire du chapitre 6.

IV. Bonus : résoudre l'exercice suivant (oraux mines 2024), qui traite encore de la fonction ch.

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère l'équation fonctionnelle $(*)$ suivante, portant sur des fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre le problème de Cauchy (E_1) : $y'' = -\omega^2 y$, $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
2. Résoudre le problème de Cauchy (E_2) : $y'' = \omega^2 y$, $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
3. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
   En déduire que la fonction ch est solution de $(*)$.
4. Soit f une solution de $(*)$. Montrer que $f(0) \in \{0,1\}$, et que si $f(0)=0$, alors f est la fonction nulle. Montrer que si $f(0)=1$, alors $f'(0)=0$.
5. Trouver toutes les solutions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de $(*)$.

Activité C suite au devoir surveillé $n°3$

Objectifs :

★ Utiliser le théorème fondamental de l'analyse.

★ Utiliser un changement de variable afin de calculer une intégrale.

I. Reprendre la partie C en autonomie sur votre copie à l'aide de la correction.

C : Calcul d'intégrales

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note I_k la fonction de la variable réelle définie par $I_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la fonction I_k est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.
   (b) Justifier que la fonction I_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter I_k'.
   (c) En déduire la monotonie de la fonction I_k.
   (d) À l'aide d'un changement de variable, montrer que I_k est une fonction impaire.
9. Expliciter la fonction I_0. Est-elle minorée ? majorée ?
10. Expliciter la fonction I_1. *On pourra utiliser le changement de variable $y = \mathrm{e}^t$.*
11. On note $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter th' en fonction de ch.
    En déduire une expression de I_2.

II. Résoudre l'exercice suivant par groupe de deux ou trois.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)+1}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ puis donner une expression simple de celle-ci.

III. Si besoin, continuer à s'entraîner à la maison avec le savoir-faire du chapitre 8.

IV. Bonus : résoudre l'exercice suivant (oraux mines 2024), qui traite encore de la fonction ch.

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère l'équation fonctionnelle $(*)$ suivante, portant sur des fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre le problème de Cauchy (E_1) : $y'' = -\omega^2 y$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
2. Résoudre le problème de Cauchy (E_2) : $y'' = \omega^2 y$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
   En déduire que la fonction ch est solution de $(*)$.
4. Soit f une solution de $(*)$. Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$, et que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle. Montrer que si $f(0) = 1$, alors $f'(0) = 0$.
5. Trouver toutes les solutions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de $(*)$.

Activité D suite au devoir surveillé $n°3$

Objectif :

★ Utiliser la formule de Leibniz pour calculer des dérivées successives.

I. Reprendre la partie D en autonomie sur votre copie à l'aide de la correction.

D : Dérivées successives et leurs applications

Considérons la fonction $h = \exp \times \mathrm{ch}$.

14. Sans la formule de Leibniz, montrer que h est infiniment dérivable et calculer $h^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
15. Reprendre la question précédente en utilisant la formule de Leibniz.
16. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Résoudre l'exercice suivant par groupe de deux ou trois.

Considérons la fonction $f = \exp \times \cos$.

1. Considérons $g : x \mapsto \exp((1+\mathrm{i})x)$. Quel est le lien entre f et g ? Justifier brièvement que g est infiniment dérivable et calculer ses dérivées successives.
2. En déduire que f est infiniment dérivable et calculer $f^{(2n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On pourra discuter selon la parité de n.
3. Reprendre la question précédente en utilisant la formule de Leibniz.
4. En déduire une expression explicite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}(-1)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. Si besoin, continuer à s'entraîner à la maison avec le savoir-faire du chapitre 6.

IV. Bonus : résoudre l'exercice suivant (oraux mines 2024), qui traite encore de la fonction ch.

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère l'équation fonctionnelle $(*)$ suivante, portant sur des fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre le problème de Cauchy $(E_1)\colon y'' = -\omega^2 y$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $(E_2)\colon y'' = \omega^2 y$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
   En déduire que la fonction ch est solution de $(*)$.
4. Soit f une solution de $(*)$. Montrer que $f(0) \in \{0,1\}$, et que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle. Montrer que si $f(0) = 1$, alors $f'(0) = 0$.
5. Trouver toutes les solutions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de $(*)$.

Activité E suite au devoir surveillé $n°3$

Objectifs :

★ Utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une s.p. d'une EDL d'ordre 1.

★ Résoudre une équation différentielle non normalisée à l'aide d'un recollement.

I. Reprendre la partie E en autonomie sur votre copie à l'aide de la correction.

E : Équation différentielle

Le but de cette partie est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) : xy' + y = \mathrm{ch}(x).$$

17. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
18. Montrer que $x \leqslant \mathrm{sh}(x) \leqslant x + \dfrac{x^3}{3}$ pour tout $x \in [0, \mathrm{argch}(2)]$.
19. Calculer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x}{x^2}$.
20. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

II. Résoudre l'exercice suivant par groupe de deux ou trois.

On considère l'équation différentielle $(E) :\ \mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = \mathrm{ch}(x)$.

1. Déterminer les plus grands intervalles sur lesquels l'équation (E) peut se normaliser.
2. Résoudre (E) sur chacun de ces intervalles.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

III. Si besoin, continuer à s'entraîner à la maison avec le savoir-faire du chapitre 9.

IV. Bonus : résoudre l'exercice suivant (oraux mines 2024), qui traite encore de la fonction ch.

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère l'équation fonctionnelle $(*)$ suivante, portant sur des fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. Résoudre le problème de Cauchy (E_1): $y'' = -\omega^2 y$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
2. Résoudre le problème de Cauchy (E_2): $y'' = \omega^2 y$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
   En déduire que la fonction ch est solution de $(*)$.
4. Soit f une solution de $(*)$. Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$, et que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle. Montrer que si $f(0) = 1$, alors $f'(0) = 0$.
5. Trouver toutes les solutions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de $(*)$.